الرقم ...

« المحاضرة الثانية عشر »

سؤال امتحان (هام جداً) 

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لهذا المؤثر $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (5x, 5y)$

الحل

نفرض $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ T وذلك يعني أنه يوجد الشعاع (x,y) والذي من أجله يكون

$$\left.\begin{array}{l} T(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \\ T(x,y) = (5x, 5y) \end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) = (5x, 5y)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda x = 5x \\ \lambda y = 5y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\lambda - 5)x + 0y \\ 0x + (\lambda - 5)y \end{array}\right\} *$$

معادلتين خطيتين متجانستين

يكون لجملة المعادلات الخطية السابقة * حل غير الحل الصفري عندما يكون معين أمثال هذه الجملة مساوياً للصفر أي عندما يكون

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$$

ويكون للجملة المعادلات الخطية السابقة * حل صفري عندما يكون معين أمثال هذه الجملة لا يساوي الصفر

{ هام جداً القوسين للثنائية مثلاً (x,y) إن لم تكتب القوسين ستنال صفراً بجدارة خ الامتحان ☺ }



لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ نقوم بتعويض $\lambda = 5$ في *

$0x + 0y = 0$

$0x + 0y = 0$

$x = 1 \quad y = 0 \Rightarrow v_1 = (x, y) = (1, 0)$

$x = 0 \quad y = 1 \Rightarrow v_2(x, y) = (0, 1)$

الشعاعين الوحيدين المستقلين خطياً وهما الشعاعين الذاتيين

$T(v_1) = (5(1), 5(0)) = 5(1, 0)$

$= 5 v_1$

$T(v_2) = (5(0), 5(1)) = 5(0, 1) = 5 v_2$

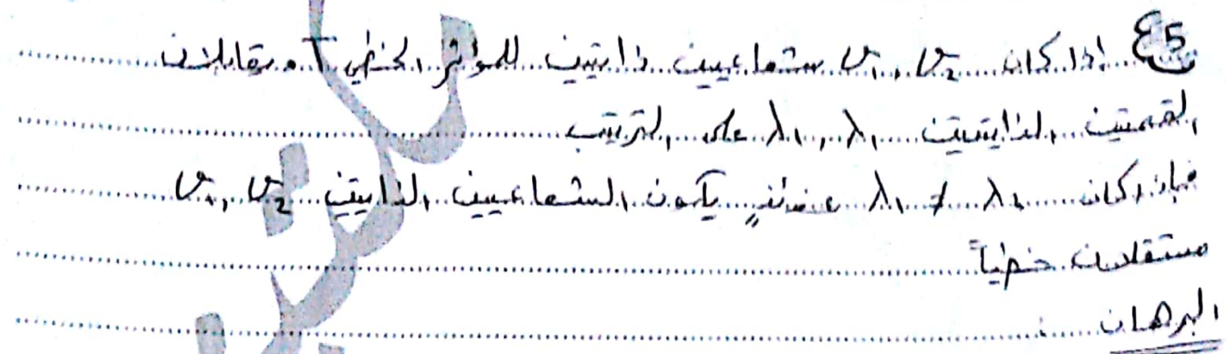
نتيجة: لو كانت $v_1, v_2, \ldots, v_n$ أشعة ذاتية للمؤثر الخطي T على الفضاء الشعاعي V وتقابل القيمة الذاتية α فإن أي تركيب خطي لهذه الأشعة من الشكل

$\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots \alpha_n v_n$ و $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_n \neq 0$

يكون شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي T على V ويقابل القيمة الذاتية α

نتيجة: ليكن $T: V \to V$ مؤثر خطي و λ قيمة ذاتية لهذا المؤثر إذا رمزنا لمجموعة كل الأشعة الذاتية لـ T والمقابلة للقيمة الذاتية λ بالرمز $V_\lambda(T)$ فلدينا واعتماداً على خواص القيم الذاتية 2 و 3 و 4 إن هذه المجموعة $V_\lambda(T)$ هي فضاء شعاعياً جزئياً من هذا الفضاء الشعاعي الجزئي بالفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية λ

سننتقل الآن إلى دراسة الخاصية الخامسة من خواص الأشعة والقيم الذاتية



5) إذا كان v_1 , v_2 شعاعين ذاتيين للمؤثر الخطي T مقابلين للقيمتين الذاتيتين λ_1 , λ_2 على الترتيب

فإن كان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ عندئذ يكون الشعاعين الذاتيين v_1 , v_2 مستقلين خطياً

البرهان:

بفرض v_1 , v_2 مرتبطين خطياً ⇐ $\exists\, t \neq 0$ ؛ $\underset{\lambda_1}{v_1} = t \underset{\lambda_2}{v_2}$

حيث نلاحظ أنه لنفس الشعاع قيمتين ذاتيتين وهذا مرفوض تماماً حيث أنه للشعاع قيمة ذاتية واحدة فقط

إذاً الفرض خاطئ

« انتهت المحاضرة الثانية عشر »

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

« إعداد: فاطمة الشمسي »